



CÁLCULO DE ÁREAS CON INTEGRALES

área bajo una curva · y área entre dos curvas

¡El área siempre es positiva: cuidado con el signo!

1 LA INTEGRAL Y EL ÁREA · el problema del signo

La integral y el área con signo

$\int_a^b f(x) dx$ cuenta como **negativo** lo que queda bajo el eje OX. Por eso **una integral no es siempre el área**.

Área bajo una curva

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

Si f cambia de signo, se parte en los cortes con OX y se suman los valores absolutos.

Área entre dos curvas

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Integramos la de arriba menos la de abajo entre sus puntos de corte.

⚠ **Error típico:** calcular $\int_a^b f(x) dx$ directamente cuando la curva cruza el eje. Eso da el **balance con signo**, no el área. ¡Hay que localizar los cortes y partir la integral!

2 ESTRATEGIA · PASO A PASO

1 Dibuja la región

Haz un esbozo con las curvas y las rectas para ver qué área buscas.

2 Halla los límites

Cortes con OX ($f = 0$) o entre curvas ($f = g$); añade las rectas $x = a$, $x = b$.

3 Estudia el signo

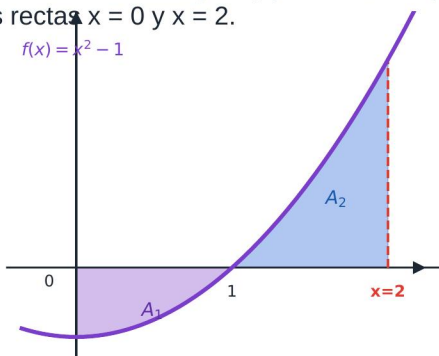
Con un punto de prueba mira si f va por encima o por debajo del eje (o de la otra curva).

4 Integra y suma

Integra en cada tramo y suma los **valores absolutos** de cada trozo.

3 CASO 1 · ÁREA ENTRE UNA CURVA Y EL EJE OX

Halla el área limitada por $f(x) = x^2 - 1$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



1 **Cortes con OX:** $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. En $[0, 2]$ el corte relevante es $x = 1$.

2 **Signo:** en $(0, 1)$ es $f < 0$ (bajo el eje); en $(1, 2)$ es $f > 0$. ¡Hay que partir en $x = 1$!

3 **Primitiva:** $\int (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{3} - x$.

4 **Tramo $[0, 1]$:** $\frac{x^3}{3} - x$ evaluada $= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow A_1 = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$.

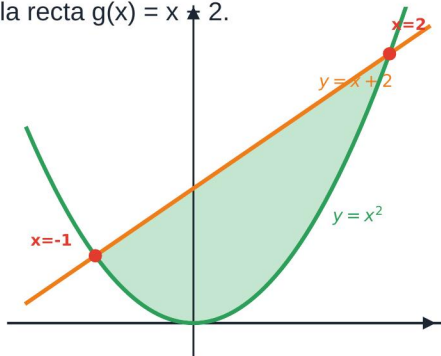
5 **Tramo $[1, 2]$:** $(\frac{8}{3} - 2) - (\frac{1}{3} - 1) = \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \Rightarrow A_2 = \frac{4}{3}$.

6 **Área total:** $A = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 u^2$.

Contraste: $\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \frac{2}{3}$ (balance con signo) $\neq 2$ (área real). Por eso hay que partir.

4 CASO 2 · ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Halla el área encerrada entre la parábola $f(x) = x^2$ y la recta $g(x) = x + 2$.



- Puntos de corte:** $x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ y $x = 2$. Son los límites.
- ¿Quién va arriba?** En $x = 0$: $g(0) = 2 > f(0) = 0 \Rightarrow$ la recta está por encima.
- Integramos** $f_{\text{arr}} - f_{\text{ab}} = (x+2) - x^2$. $A = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx$
- Primitiva:** $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}$.
- Evaluamos:** en $x = 2$ vale $\frac{10}{3}$; en $x = -1$ vale $-\frac{7}{6}$.
- Área:** $A = \frac{10}{3} - (-\frac{7}{6}) = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} u^2$.

Truco: "arriba - abajo" ya sale positivo entre los cortes, así que **aquí no hace falta valor absoluto** (mientras no se crucen dentro del intervalo).

5 AVISOS Y CASOS PARTICULARES · lo que más se pregunta en la PAU

Curva enteramente bajo el eje

Si $f(x) < 0$ en todo $[a, b]$, el área es $A = -\int_a^b f(x) dx = |\int_a^b f(x) dx|$. La integral sale negativa; el área es su valor absoluto.

Varios cortes con el eje

Si f corta el eje varias veces dentro de $[a, b]$, hay que partir en **cada raíz** del intervalo e integrar por separado, sumando los valores absolutos de cada tramo.

Dos curvas que se cruzan

Si f y g se cortan **dentro** del intervalo, cambia quién va arriba: localiza esos cortes y parte también ahí, sumando $|f - g|$ en cada trozo.

Fórmulas para recordar

Curva $A = \int_a^b |f(x)| dx$ (parte en los cortes con OX)

Curvas $A = \int_a^b |f_{\text{arr}} - f_{\text{ab}}| dx$

Idea clave

Primero **los cortes** (dan los límites y dónde partir), luego **el signo** (quién va arriba), y al final **integrar y sumar en valor absoluto**. Un buen dibujo evita casi todos los errores.

