



OPERACIONES CON MATRICES

Suma · Escalar · Producto · Traspuesta · Inversa

¡Ojo con las dimensiones!
Deciden qué operaciones
puedes hacer.

1 QUÉ ES UNA MATRIZ · el lenguaje base

Una matriz es una tabla de números ordenados en **filas y columnas**. Su **dimensión** u orden es $m \times n$ (filas $\times$ columnas). Cada número es un **elemento** a_{ij} (i = fila, j = columna). Saber leer la dimensión es lo primero: decide qué operaciones se pueden hacer.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Dimensión 2×3 . El elemento a_{23} está en la **fila 2, columna 3**.

Fila: $1 \times n$. **Columna:** $m \times 1$.

Diagonal principal: los a_{ii} .

Nula (0): todos los elementos son cero.

Cuadrada: $m = n$.

Identidad (I): unos en la diagonal, ceros en el resto.

Triangular: ceros por encima o por debajo de la diagonal.

2 SUMA, RESTA Y PRODUCTO POR UN NÚMERO

Son las más sencillas: se hacen **elemento a elemento**. Para sumar o restar, las dos matrices deben tener **exactamente la misma dimensión**; si no coinciden, la operación no existe.

Suma y resta · elemento a elemento

Se suman (o restan) los elementos de la misma posición: $(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Propiedades: conmutativa ($A+B = B+A$) y asociativa. El neutro es la matriz nula 0.

Producto por un escalar k

Se multiplica cada elemento por el número k : $(kA)_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades: distributiva: $k(A+B) = kA + kB$, y $(k+l)A = kA + lA$.

3 PRODUCTO DE MATRICES · fila $\times$ columna

Es la operación más importante y la que más cuesta. **No** se multiplica elemento a elemento: cada resultado combina una **fila** de la primera con una **columna** de la segunda, multiplicando término a término y sumando.

La condición de dimensiones

Para hacer $A \cdot B$, las **columnas de A** deben coincidir con las **filas de B**:

$$A_{(m \times p)} \cdot B_{(p \times n)} = C_{(m \times n)}$$

Las de dentro deben ser iguales; las de fuera dan el tamaño del resultado.

⚠ **No es conmutativa:** en general $A \cdot B \neq B \cdot A$. A veces $B \cdot A$ ni se puede calcular. El neutro es la identidad: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Ejemplo desarrollado $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (1,1)** = fila 1 $\times$ col 1: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 15$.
- (1,2)** = fila 1 $\times$ col 2: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 19$.
- (2,1)** = fila 2 $\times$ col 1: $2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 10$.
- (2,2)** = fila 2 $\times$ col 2: $2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 24$.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & 19 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}$$



4 MATRIZ TRASPUESTA

A^T se obtiene **cambiando filas por columnas**: la 1ª fila de A pasa a ser la 1ª columna de A^T . Si A es $m \times n$, A^T es $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, y $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (se invierte el orden).

Simétrica: $A^T = A$ (espejo respecto de la diagonal). Debe ser cuadrada.

Antisimétrica: $A^T = -A$ (la diagonal es toda ceros).

Ejemplo simétrica: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

coincide con su traspuesta porque $a_{12} = a_{21} = 3$.

5 MATRIZ INVERSA · método de Gauss-Jordan

La inversa A^{-1} «deshace» a A: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Solo existe si A es **cuadrada** y **det A $\neq 0$** (A regular); si $\det A = 0$ no tiene inversa (singular). Con **Gauss-Jordan** se parte de $[A | I]$ y se transforma la izquierda en I; lo que queda a la derecha es A^{-1} .

Comprobación previa · determinante

1. Partimos de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\det A = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \rightarrow$ tiene inversa.
3. Colocamos $[A | I]$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Gauss-Jordan paso a paso

1. $F_1 \leftarrow F_1/2$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$
2. $F_2 \leftarrow F_2 - F_1$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right)$
3. $F_2 \leftarrow 2F_2$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$
4. $F_1 \leftarrow F_1 - 1/2 F_2$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{comprob. } A \cdot A^{-1} = I)$$

Lo que nunca debes olvidar

Sumar: misma dimensión, elemento a elemento.

Multiplicar: columnas de A = filas de B.

Producto: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (no conmutativa).

Inversa: solo si es cuadrada y $\det \neq 0$.

Idea clave

Antes de operar, **mira las dimensiones**: te dicen qué es posible y qué tamaño tendrá el resultado. En el producto, filas $\times$ columnas; la traspuesta cambia filas por columnas; y con Gauss-Jordan obtienes la inversa (solo si A es cuadrada y regular).

