



LÍMITES II · INDETERMINACIONES

las 7 formas indeterminadas y cómo resolver cada una

Una indeterminación no significa que no exista: hay que transformar la expresión.

1 LAS 7 FORMAS INDETERMINADAS

Al **sustituir directamente** pueden salir formas **sin valor definido**. No dicen que el límite no exista: hay que reescribir la expresión para eliminarlas.

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$1^\infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

OJO — estas **NO** son indeterminadas: $\frac{k}{0} = \pm\infty$ · $\frac{k}{\infty} = 0$ · $0^\infty = 0$ · $\infty^\infty = \infty$ · $\infty + \infty = \infty$

2 TÉCNICA PARA CADA FORMA · identifica la forma al sustituir y aplica

$$\frac{0}{0}$$

Factorizar / conjugado

Factoriza y cancela el factor que se anula; con raíces, multiplica por el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Grados

Divide todo entre la mayor potencia de x (compara grados).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{x^2 + 5} = 3$$

$$\infty - \infty$$

Conjugado / común denom.

Únelo en una sola fracción o racionaliza con el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}$$

$$0 \cdot \infty$$

A cociente

Pasa un factor al denominador para formar $0/0$ o ∞/∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$$

$$1^\infty$$

Número e

$\lim f^g = e^{\lim g(f-1)}$ (o toma logaritmos).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

$$0^0$$

Logaritmos

$y = f^g$, tomas $\ln$: $\ln y = g \cdot \ln f$ ($\rightarrow 0 \cdot \infty$); resuelves y exponencias.

$$\ln y = g \cdot \ln f \Rightarrow y = e^{(\dots)}$$

$$\infty^0$$

Logaritmos

Igual que 0^0 : toma $\ln$ para bajar el exponente y resuelve.

$$\ln y = g \cdot \ln f \Rightarrow y = e^{(\dots)}$$



3 REGLA DE L'HÔPITAL · el atajo universal MATES II

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{solo para } \frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty} \text{ (f, g derivables)}$$

Cómo se usa

Si al sustituir sale **0/0** o ∞/∞ , deriva **arriba y abajo por separado** (no es la derivada del cociente). Puedes **repetirla** las veces que haga falta.

Prepara las demás formas

$0 \cdot \infty \rightarrow$ cociente · $\infty - \infty \rightarrow$ una fracción · $1^\infty, 0^0, \infty^0 \rightarrow$ logaritmo. Luego ya aplicas L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

4 EJEMPLOS RESUELTOS · paso a paso

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

0/0

- 1 **Sustituye:** da $\frac{0}{0}$ (indeterminado).
- 2 **Factoriza:** $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
- 3 **Cancela** $(x - 2)$: $= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$.
- 4 **Sustituye:** $= 2 + 2 = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$\infty - \infty$

- 1 **Sustituye:** da $\infty - \infty$ (indeterminado).
- 2 **Conjugado:** $\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$.
- 3 **Divide entre x:** $= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1}$.
- 4 $x \rightarrow \infty$: $= \frac{1}{\sqrt{1 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

1^∞

- 1 **Sustituye:** da 1^∞ (indeterminado).
- 2 **Fórmula del número e:** $\lim = e^L$ con $L = \lim_{x \rightarrow \infty} g \cdot (f - 1)$.
- 3 **Calcula L:** $= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{3}{x} = 3$.
- 4 **Resultado:** $= e^3$.

5 REGLA DE ORO · lo que descuenta en la PAU

Sustituye primero

Solo transformas si al sustituir aparece una **indeterminación**. Si sale un número (o $\pm\infty$), **ese es el límite**.

Casi todo $\rightarrow 0/0$ o ∞/∞

Factoriza, divide entre potencias o racionaliza para llegar a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$... y ahí **L'Hôpital** (Mates II).

Exponentes $\rightarrow$ logaritmo

$1^\infty, 0^0$ y ∞^0 se resuelven **tomando ln** (para 1^∞ también sirve la fórmula del número e).

