



PROBABILIDAD III · BAYES

árboles · tablas de contingencia · probabilidad total · Bayes

El árbol va hacia delante;
Bayes lo recorre hacia atrás.

1 DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Regla 1

Las ramas que salen de un mismo nodo **suman 1**

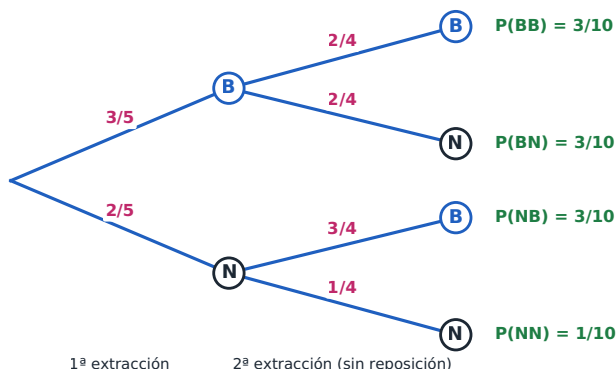
Regla 2

Recorrer un camino = **multiplicar** sus ramas (regla del producto).

Regla 3

Sucesos de distintos caminos = **sumar** (son incompatibles).

Ejemplo. Urna con **3 bolas blancas** y **2 negras**. Se extraen dos bolas **sin reposición**. Tras sacar la 1ª, quedan 4 bolas: por eso cambian las probabilidades de la 2ª rama.



$$P(\text{las dos blancas}) = P(BB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{una de cada}) = P(BN) + P(NB) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(2^\text{a} blanca) = P(BB) + P(NB) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

2 SISTEMA COMPLETO Y TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sistema completo de sucesos

$A_1, A_2, \dots, A_i$ forman un **sistema completo** si:

- son **incompatibles** dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$),
- su unión es todo E (**lo cubren todo**).

El caso más sencillo: **A y $\bar{A}$** .

Teorema de la probabilidad total

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots + P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Es decir: para hallar $P(B)$ **se recorren todos los caminos del árbol que acaban en B** y se suman. Cada camino aporta «probabilidad de la rama × probabilidad condicionada».

$$\text{Caso de dos ramas: } P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}).$$

3 TEOREMA DE BAYES · la probabilidad «a posteriori»

La fórmula

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

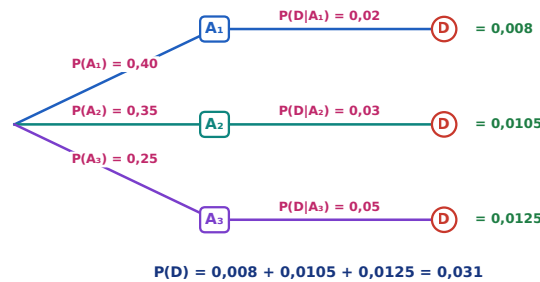
donde **$P(B)$ es la probabilidad total** (todo el denominador).

Cómo se reconoce y cómo se hace

- 1 El enunciado da **$P(A_i)$ y $P(B|A_i)$** (van hacia delante) y pregunta por **$P(A_i|B)$** (hacia atrás).
- 2 Dibuja el árbol y calcula **$P(B)$** con la probabilidad total.
- 3 Divide el **camino que interesa** entre esa $P(B)$. Nada más.

4 EJERCICIO TIPO PAU · probabilidad total + Bayes

Enunciado. Tres máquinas producen el **40 %** (A_1), el **35 %** (A_2) y el **25 %** (A_3) de las piezas; son **defectuosas (D)** el 2 %, 3 % y 5 % respectivamente. **a)** ¿Probabilidad de que una pieza al azar sea defectuosa? **b)** Si es defectuosa, ¿probabilidad de que la haya fabricado A_3 ?



- Datos del árbol.** $P(A_1) = 0,40$ · $P(A_2) = 0,35$ · $P(A_3) = 0,25$ (suman 1 ✓). $P(D|A_1) = 0,02$ · $P(D|A_2) = 0,03$ · $P(D|A_3) = 0,05$.
- a) Probabilidad total.** $P(D) = 0,40 \cdot 0,02 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,008 + 0,0105 + 0,0125 = \mathbf{0,031}$ (3,1 %).
- b) Bayes.** $P(A_3|D) = \frac{P(A_3) \cdot P(D|A_3)}{P(D)} = \frac{0,0125}{0,031} \approx \mathbf{0,4032}$ (40,3 %).
- Comprobación.** $P(A_1|D) = \frac{0,008}{0,031} \approx 0,2581$ · $P(A_2|D) = \frac{0,0105}{0,031} \approx 0,3387$. Las tres suman **1** ✓
- Lectura.** A_3 solo fabrica el 25 % de las piezas, pero es responsable del **40 %** de las defectuosas: la información «es defectuosa» cambia las probabilidades.

5 TABLAS DE CONTINGENCIA

Idea: con frecuencias, toda probabilidad es «casos entre total». Los **totales de fila y columna** dan las probabilidades simples; una **casilla** da la intersección; y para una condicionada, **el total de su fila o columna es el nuevo denominador**.

	Aprueba (Ap)	Suspende	Total
Chico (H)	90	30	120
Chica (M)	60	20	80
Total	150	50	200

200 estudiantes de un instituto.

Se lee directamente de la tabla

Simple: $P(\text{Ap}) = \frac{150}{200} = 0,75$ · $P(\text{M}) = \frac{80}{200} = 0,4$

Intersección: $P(\text{M} \cap \text{Ap}) = \frac{60}{200} = 0,3$

Condicionada (fila): $P(\text{Ap}|\text{M}) = \frac{60}{80} = 0,75$

Condicionada (columna): $P(\text{M}|\text{Ap}) = \frac{60}{150} = 0,4$

¿Independientes? $P(\text{M}) \cdot P(\text{Ap}) = 0,4 \cdot 0,75 = 0,3 = P(\text{M} \cap \text{Ap}) \Rightarrow$ **sí**. (Coherente: $P(\text{Ap}|\text{M}) = P(\text{Ap})$.)

6 AVISOS FRECUENTES

⚠ **No confundas el sentido de la barra**

$P(D|A_3) = 0,05$ es un **dato** del árbol. $P(A_3|D) \approx 0,40$ es lo que **calcula Bayes**. Son números completamente distintos.

⚠ **El denominador de Bayes es P(B) entera**

Hay que sumar **todos** los caminos que llegan a B, no solo el que interesa. Si te olvidas de una máquina, el resultado no llega a sumar 1.

⚠ **Con reposición vs. sin reposición**

Sin reposición: las ramas de la 2ª extracción **cambian** (hay una bola menos). **Con reposición:** se repiten iguales (extracciones **independientes**).

⚠ **Comprueba siempre las sumas**

Ramas de un nodo: suman 1. Caminos completos: suman 1. Probabilidades a posteriori $P(A_i|B)$: también **suman 1**. Es tu control de errores.