



REGLA DE CRAMER

resolver por determinantes · SCD y SCI paso a paso

Cada incógnita = un cociente de determinantes.

1 LA REGLA DE CRAMER

Cuándo se aplica y cómo

Para un sistema **SCD** (cuadrado y con $\Delta = \det A \neq 0$), cada incógnita es:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Δ = determinante de la matriz de coeficientes.

¿Qué es Δ_x , Δ_y , Δ_z ?

Es el determinante Δ pero **cambiando la columna de esa incógnita** por la **columna de términos independientes** b.

Para Δ_x se sustituye la 1ª columna, para Δ_y la 2ª, para Δ_z la 3ª. La columna cambiada se marca **en rojo**.

2 EJEMPLO 1 · SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD)

El sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Paso 1 · el determinante Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ es **SCD** y podemos aplicar Cramer.

Paso 2 · un determinante por incógnita (se sustituye su columna por b):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & -1 & 1 \\ \mathbf{3} & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \mathbf{3} \\ 1 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & \mathbf{3} \end{vmatrix} = 0$$

Paso 3 · dividir entre Δ :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{3} = \mathbf{1} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{3} = \mathbf{1} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{3} = \mathbf{0}$$

Comprobación: (1, 1, 0) en la 1ª ecuación: $2 \cdot 1 + 1 + 0 = 3 \checkmark$. Solución única.



3 CRAMER EN UN SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI)

Si el sistema es **SCI**, hay **menos ecuaciones útiles que incógnitas**. La idea:

- 1 Con $\text{rg}(A) = 2$ y 3 incógnitas, **sobra una ecuación** (es combinación de las otras): se descarta.
- 2 Se elige una incógnita como **parámetro** (aquí $z = \lambda$) y se **pasa al segundo miembro**.
- 3 Quedan **2 ecuaciones con 2 incógnitas** (x, y): se resuelve por **Cramer**, con λ en los términos independientes.

4 EJEMPLO 2 · SCI PASO A PASO

El sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3z = 7 \end{cases}$$

La 3ª ecuación es la **suma** de las dos primeras ($E_3 = E_1 + E_2$): es redundante $\Rightarrow$ **SCI**, $\text{rg} = 2$.

Paso 1 · descartar y parametrizar

Quitamos E_3 y hacemos **$z = \lambda$** , pasándola al 2º miembro:

$$\begin{cases} x + y = 3 - \lambda \\ x - y = 4 - 2\lambda \end{cases}$$

Paso 2 · Cramer al sistema 2×2 (incógnitas x, y ; λ va en los términos independientes):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4-2\lambda & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 7 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 1 & 4-2\lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda$$

Paso 3 · dividir y escribir la solución en función de λ :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3\lambda - 7}{-2} = \frac{7 - 3\lambda}{2} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1 - \lambda}{-2} = \frac{\lambda - 1}{2} \quad z = \lambda$$

Solución (infinitas): para cada valor de λ hay una solución. Con $\lambda = 1$: $(x, y, z) = (2, 0, 1)$, que cumple E_1 : $2 + 0 + 1 = 3$ ✓ y E_2 : $2 - 0 + 2 = 4$ ✓.

5 AVISOS FRECUENTES

⚠ Cramer directo solo si $\Delta \neq 0$

Si $\Delta = 0$ no se puede dividir: el sistema no es SCD. Habrá que discutir (SCI o SI) y, si es SCI, parametrizar.

⚠ Se sustituye la columna, no la fila

Δ_x cambia la **columna** de x por b , dejando las demás igual. Un error típico es tocar una fila.

⚠ El parámetro va al 2º miembro

En el SCI, al hacer $z = \lambda$, el término λ pasa restando al lado de los términos independientes antes de aplicar Cramer.

⚠ N° de parámetros = incógnitas - rg

Aquí $3 - 2 = 1$ parámetro (λ). Si faltaran dos rangos, habría dos parámetros y se pasarían dos incógnitas.

