



DETERMINANTES

2x2 · Sarrus 3x3 · desarrollo por adjuntos · propiedades

Un número asociado a una matriz cuadrada: $\det A$ o $|A|$.

1 DETERMINANTE 2x2 Y 3x3 (SARRUS)

Orden 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

Producto de la diagonal principal menos el de la secundaria.

Orden 3 · regla de Sarrus

Se suman los **tres productos** «↘» (diagonal principal y sus paralelas) y se restan los **tres productos** «↗» (diagonal secundaria y sus paralelas).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Positivos: $1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 6 = 40$. **Negativos:** $3 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 39$.

$$\det A = 40 - 39 = 1$$

2 DESARROLLO POR ADJUNTOS · vale para cualquier orden

La regla de Laplace

El determinante es la suma, a lo largo de **una fila o columna**, de cada elemento por su **adjunto**:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

con $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ (menor con signo). **Truco:** elige la fila o columna con **más ceros** para ahorrar cuentas.

Ejemplo · misma A, por la 1ª columna

La 1ª columna es (1, 0, 5): el 0 anula su término.

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (0 - 24) + 5 \cdot (8 - 3) = -24 + 25 = 1 \quad \checkmark \text{ (coincide con Sarrus).}$$

Signos de la 1ª columna: +, -, + (por el tablero $(-1)^{i+j}$).

3 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ TRIANGULAR

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Si la matriz es **triangular** (ceros por debajo o por encima de la diagonal), el determinante es el **producto de la diagonal principal**. Por eso escalar (método de Gauss) también sirve para calcular determinantes.

4 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Fila o columna de ceros	Si una fila (o columna) es toda de ceros $\Rightarrow \det A = 0$.
Filas iguales o proporcionales	Si dos filas (o columnas) son iguales o proporcionales $\Rightarrow \det A = 0$.
Intercambiar dos filas	Cambia el signo del determinante: $\det$ pasa a $-\det$.
Multiplicar una fila por k	El determinante queda multiplicado por k . (Y $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$ en orden n.)
Sumar a una fila otra $\times k$	$F_i \rightarrow F_i + k \cdot F_j$ no cambia el determinante. (Sirve para «hacer ceros».)
Traspuesta	$\det(A^t) = \det(A)$: filas y columnas dan lo mismo.
Producto	$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Además $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
Triangular	$\det =$ producto de la diagonal principal.



5 EJEMPLO · SIMPLIFICAR HACIENDO CEROS · misma A

La propiedad estrella es $F_i \rightarrow F_i + k \cdot F_j$: **no cambia** el determinante y sirve para crear ceros. Partimos de A y anulamos la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -15 \end{vmatrix}$$

Ahora la 1ª columna es (1, 0, 0): desarrollamos por ella y solo sobrevive el primer término:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -15 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-15 - (-16)) = 1 \cdot (-15 + 16) = 1$$

Mismo resultado que por Sarrus y por adjuntos. Hacer ceros primero **reduce las cuentas**, sobre todo en órdenes altos.

6 RELACIÓN CON EL RANGO Y LA INVERSA

$\det A \neq 0$ · matriz regular

Rango máximo (n). Filas y columnas **independientes**. Existe A^{-1} . El sistema asociado es compatible determinado.

$\det A = 0$ · matriz singular

Rango < n. alguna fila/columna es **combinación** de las otras. **No existe** A^{-1} . El sistema no es compatible determinado.

7 AVISOS FRECUENTES

⚠ Solo matrices cuadradas

El determinante **solo existe** para matrices cuadradas ($n \times n$). No tiene sentido para 2×3 .

⚠ Sarrus es solo para 3×3

La regla de Sarrus **no vale** para 4×4 ni mayores. Para esos, desarrolla por adjuntos o triangula.

⚠ $\det(A + B) \neq \det A + \det B$

El determinante **no es lineal** respecto de la suma de matrices. Sí se cumple para el **producto**: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

⚠ No olvides los signos del tablero

En el desarrollo por adjuntos, A_{ij} lleva $(-1)^{i+j}$. Guíate por el patrón $++- / -+- / +-+$.

