



ASÍNTOTAS

verticales, horizontales y oblicuas · todo se decide con límites

Cada asíntota es, en el fondo, **un límite** de la función.

1 ¿QUÉ ES UNA ASÍNTOTA?

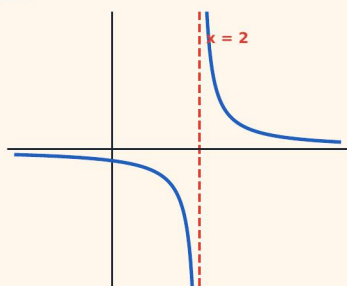
Una **asíntota** es una recta a la que la gráfica de $f(x)$ se aproxima **indefinidamente**. Su definición y su cálculo son **siempre un límite**: estudiamos qué hace f cuando $x \rightarrow a$ (donde f se dispara) o cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Dato clave

Las asíntotas **horizontal** y **oblicua** nunca coexisten: lo decide el límite en $\pm\infty$ (si es finito, hay AH; si es $\pm\infty$ con pendiente finita, hay AO).

2 LOS TRES TIPOS · cada uno definido por un límite

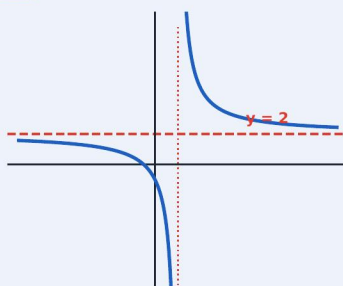
AV Verticales



Def.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ recta $x = a$.

La función se dispara cerca de $x = a$.

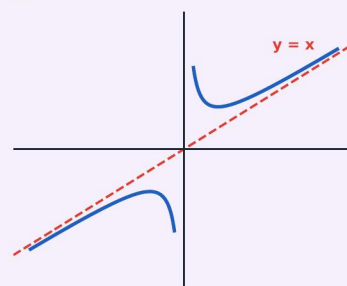
AH Horizontales



Def.: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ (finito) $\Rightarrow$ recta $y = L$.

La función se estabiliza en un valor.

AO Oblicuas



Def.: $y = mx + n$ con $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$.

$f \rightarrow \infty$, pero su pendiente m es finita.

3 CÓMO SE CALCULAN · siempre con límites

Verticales (AV)

Hay AV en $x = a$ si un **límite lateral se dispara**: $\lim_{x \rightarrow a^-} f = \pm\infty$ ó $\lim_{x \rightarrow a^+} f = \pm\infty$. En racionales: ceros de $Q(x)$ con $P(a) \neq 0$.

Horizontales (AH)

Hay AH $y = L$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = L$ ó $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = L$ (**finito**). Estudia los dos lados: pueden dar distinto. En racionales: grado $P \leq$ grado Q .

Oblicuas (AO)

Hay AO si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$ pero $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f}{x}$ es **finito y $\neq 0$** ; entonces $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f - mx)$.
En racionales: grado $P =$ grado $Q + 1$.



4 EJEMPLO CON ASÍNTOTA OBLICUA · m y n como límites

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

1 **Vertical:** en $x = 1$ se anula el denominador y el numerador vale $4 \neq 0$. Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \frac{4}{0^-} = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f = \frac{4}{0^+} = +\infty \Rightarrow \text{AV: } x = 1.$$

2 **Horizontal:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = \pm\infty$ (no es finito) $\Rightarrow$ **no hay AH**. Buscamos oblicua.

3 **Pendiente m:** $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x} = 1$ (grados iguales, cociente de coef. principales).

4 **Ordenada n:** $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 2x + 1) - x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = 3$.

5 **Resultado: AO: $y = x + 3$** (junto con la AV $x = 1$). Coincide con la división: $f = x + 3 + \frac{4}{x - 1}$.

5 EJEMPLO CON ASÍNTOTA HORIZONTAL · el límite en $\pm\infty$ es finito

$$g(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

1 **Vertical:** $\lim_{x \rightarrow 1^-} g = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g = +\infty \Rightarrow \text{AV: } x = 1$.

2 **Horizontal:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2$ (finito) $\Rightarrow \text{AH: } y = 2$ por ambos lados.

3 **Oblicua:** como $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g}{x} = 0$ (no es $\neq 0$), **no hay AO**. Coherente: si hay horizontal, no hay oblicua.

6 AVISOS FRECUENTES · lo que descuenta en la PAU

Todo sale de un límite

No memorices reglas sueltas: AV, AH y AO son **límites** (en a , en $\pm\infty$, y el de f/x). Los grados son solo el **atajo** en racionales.

Agujero, no AV

Si en $x = a$ se anulan **numerador y denominador**, el límite puede ser **finito**: es un **agujero**, no una asíntota vertical.

Estudia los dos lados

Los límites en $+\infty$ y $-\infty$ (y los laterales en una AV) pueden dar **distinto**. Cálculalos por separado.

