



INVERSA POR DETERMINANTES

fórmula de la adjunta · $A^{-1} = (1/\det A) \cdot (\text{adj } A)^T$ · paso a paso

Una fórmula directa:
determinante, adjuntos y
trasponer.

1 LA FÓRMULA Y EL GUION DE PASOS

Fórmula de la inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{adj } A)^T$$

Condición: solo existe si $\det A \neq 0$ (matriz regular). Si $\det A = 0$, **no hay inversa**.

Los cuatro pasos

- 1 Calcular el **determinante** $\det A$ (y comprobar que $\neq 0$).
- 2 Formar la **matriz adjunta** $\text{adj } A$ (matriz de los **adjuntos** o cofactores).
- 3 **Trasponer:** $(\text{adj } A)^T$.
- 4 **Dividir** cada elemento entre $\det A$.

Aviso de notación: el **adjunto** A_{ij} de un elemento es su menor complementario **con signo**: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. La «matriz adjunta» $\text{adj } A$ es la matriz formada por todos esos adjuntos.

2 PASO 1 · EL DETERMINANTE · regla de Sarrus

Trabajamos con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Por Sarrus, $\det A = (\text{productos «}\searrow\text{»}) - (\text{productos «}\swarrow\text{»})$:

$$\det A = (1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2) - (1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 1) = (1 + 0 + 4) - (2 + 2 + 0) = 5 - 4 = 1.$$

Como **$\det A = 1 \neq 0$** , la inversa existe. (Además, al ser $\det = 1$, no habrá fracciones al final.)

3 PASO 2 · MATRIZ DE ADJUNTOS · cada adjunto = menor con signo

Tablero de signos

+	-	+
-	+	-
+	-	+

$(-1)^{i+j}$: alterna empezando en +.

Cada adjunto $A_{ij} = \text{signo} \cdot \text{menor } 2 \times 2$

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 2) = 0$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4 PASO 3 Y 4 · TRASPONER Y DIVIDIR

Paso 3. Trasponemos adj A (las filas pasan a columnas):

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ traspone} \rightarrow (\text{adj } A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4. Multiplicamos por $1/\det A = 1/1 = 1$ (aquí no cambia nada, pero es el paso donde aparecerían las fracciones si $\det \neq 1$):

$$\frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\det A$ no fuera 1 (por ejemplo $\det A = 2$), cada entrada se dividiría entre 2 y la inversa saldría con fracciones: $A^{-1} = (1/2) \cdot (\text{adj } A)^t$.

5 COMPROBACIÓN

Se comprueba multiplicando: $A \cdot A^{-1} = I$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Fila 1 · columna 1: $1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 1 \checkmark$ · Fila 1 · columna 2: $1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 0 \checkmark$. Con un par de entradas basta para detectar errores.

6 AVISOS FRECUENTES

⚠ No olvides traspone

La fórmula lleva $(\text{adj } A)^t$, no adj A. Si no traspones, la inversa sale mal (salvo que A sea simétrica).

⚠ $\det A = 0 \Rightarrow$ no hay inversa

Si el determinante es 0, la matriz es **singular** y la fórmula no se puede aplicar (habría $1/0$).

⚠ Adjunto = menor CON signo

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Guíate por el **tablero ++**. Olvidar el signo es el error más común.

⚠ Divide TODA la matriz entre $\det A$

El factor $1/\det A$ multiplica a **todos** los elementos de $(\text{adj } A)^t$, no solo a uno.

