



# POTENCIA DE UNA MATRIZ

¿Cómo calcular  $A^n$  sin multiplicar  $n$  veces? · dos estrategias

Busca que las potencias se repitan o sigan un patrón.

## 1 ¿QUÉ ES $A^n$ ?

Solo se define para matrices **cuadradas**. Es multiplicar  $A$  por sí misma  $n$  veces:

$$A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \quad (n \text{ veces})$$

$$A^0 = I \quad A^1 = A$$

### Propiedades

- $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ .
- $(A^m)^n = A^{mn}$ .
- $A^n \cdot B^n \neq (AB)^n$  en general, **salvo que  $A$  y  $B$  conmuten**.
- No vale el binomio clásico:  $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$  (porque  $AB \neq BA$ ).

### Idempotente

$$A^2 = A \implies$$

$$A^n = A \quad (n \geq 1).$$

### Involutiva

$$A^2 = I \implies A^n = I \text{ si } n \text{ par,}$$

$$A \text{ si } n \text{ impar.}$$

### Nilpotente

$$A^k = O \implies$$

$$A^n = O \text{ para } n \geq k.$$

### Periódica

$$A^k = I \implies \text{las potencias se repiten cada } k.$$

## 2 CASO 1 · MATRICES CÍCLICAS (periódicas)

**La idea:** si al recalcular potencias reaparece la identidad,  $A^k = I$  (con  $k$  el menor exponente), la matriz es **periódica de periodo  $k$**  y las potencias se repiten en ciclos. Reduce el exponente **módulo  $k$** :  $A^n = A^r$ , donde  $r$  es el resto de dividir  $n$  entre  $k$ .

### Ejemplo · matriz de permutación 3x3

1 Partimos de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 Calculamos  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ .

3 ¡Aparece  $A^3 = I$ !  $\implies A$  es periódica de periodo  **$k = 3$** .

### Usar el periodo para cualquier $A^n$

1 Se repiten cada 3:  $A^n = A^r$ , con  $r = \text{resto de } n \text{ entre } 3$ :  $r=0 \rightarrow I$ ,  $r=1 \rightarrow A$ ,  $r=2 \rightarrow A^2$ .

2 Ejemplo  $A^{100}$ :  $100 = 3 \cdot 33 + 1 \implies r = 1$ .

3 Por tanto  $A^{100} = A^1 = A$ . ¡Sin multiplicar 100 veces!

**Truco:** el caso **involutiva** ( $A^2 = I$ ) es una matriz cíclica de periodo 2.



### 3 CASO 2 · BUSCAR UN PATRÓN (inducción)

**La idea:** si la matriz no es cíclica, calculamos las primeras potencias, observamos cómo cambian sus elementos, **conjeturamos** una fórmula para  $A^n$  y la **demostramos por inducción**.

#### Paso 1 · observar y conjeturar

- 1 Partimos de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 2 Primeras potencias:  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 3 El patrón salta a la vista: solo cambia la esquina superior derecha, que vale  $n$ .
- 4 Conjetura:  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

#### Paso 2 · demostración por inducción

- 1 **Caso base** ( $n = 1$ ):  $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  coincide con la fórmula.
- 2 **Hipótesis:** suponemos cierto para  $k$ :  $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 3 **Paso inductivo** ( $k \rightarrow k+1$ ):  $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 4 Coincide con la fórmula para  $k+1 \Rightarrow$  queda probada para todo  $n$ .

#### ¿Qué método uso?

**Cíclica:** si al calcular  $A^2, A^3 \dots$  reaparece  $I$  (o  $A$ )  $\Rightarrow$  reduce el exponente módulo el periodo.

**Patrón:** si las entradas siguen una regla clara  $\Rightarrow$  conjetura  $A^n$  y demuéstrela por inducción.

#### Idea clave

Nunca multipliques  $n$  veces. Calcula  **$A^2$  y  $A^3$** : o bien se repiten (matriz cíclica) o bien revelan un **patrón** que se prueba por inducción. Casi todos los ejercicios caen en uno de estos dos caminos.

