



INVERSA POR EL MÉTODO DE GAUSS

método de Gauss en 3x3 · Gauss-Jordan · cálculo de A^{-1}

Transformar la matriz por filas hasta llegar a la identidad.

1 OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS

Todo el método se basa en tres operaciones que **no cambian las soluciones** del sistema (ni, luego, la inversa). Se aplican a las filas F_1, F_2, F_3 :

1 · Intercambiar

cambiar dos filas de orden $F_i \leftrightarrow F_j$

2 · Multiplicar

una fila por un número $\neq 0$ $F_i \rightarrow k \cdot F_i$

3 · Combinar

sumar a una fila un múltiplo de otra $F_i \rightarrow F_i + k \cdot F_j$

Objetivo (forma escalonada): usar la operación 3 para conseguir **ceros por debajo de la diagonal**, dejando la matriz «triangular». La 3 es la que más se usa: fija un **pivote** y con él anula los elementos que tiene debajo.

2 MÉTODO DE GAUSS EN UN SISTEMA 3x3 · escalonar y sustituir

Resolvemos: $x + y + z = 6$; $2x + y - z = 1$; $x - y + 2z = 5$. Escribimos la **matriz ampliada** ($A | b$) y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array} \right)$$

Ya es **triangular**. Ahora **sustitución hacia atrás**, de abajo arriba:

- 1 Última fila: $7z = 21 \Rightarrow z = 3$.
- 2 Segunda fila: $-y - 3z = -11 \Rightarrow -y - 9 = -11 \Rightarrow y = 2$.
- 3 Primera fila: $x + y + z = 6 \Rightarrow x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$.

Solución: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Si en vez de parar aquí seguimos haciendo ceros también **por encima** de la diagonal hasta llegar a la identidad, tenemos el método de **Gauss-Jordan**, que es justo el que usaremos para la inversa.

3 LA IDEA: $(A | I) \rightarrow (I | A^{-1})$

En qué consiste

Se coloca a la derecha de A la **matriz identidad** I , formando la matriz ampliada $(A | I)$.

Se aplican operaciones por filas hasta convertir la parte izquierda en I . Las mismas operaciones transforman la derecha en A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} A & & & I & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} I & & & & A^{-1} & \end{array} \right)$$

Cuándo existe la inversa

Solo si **$\det(A) \neq 0$** (matriz regular). Si al escalonar aparece una **fila entera de ceros** a la izquierda, es que $\det(A) = 0$ y **A no tiene inversa**.

La estrategia práctica: primero hacer ceros **debajo** de la diagonal (bajada), y luego **encima** (subida), como en Gauss-Jordan.

4 EJEMPLO COMPLETO PASO A PASO · A^{-1} de una matriz 3×3

Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ($\det = 1 \neq 0$, existe).

Partimos de $(A | I)$ y hacemos ceros primero **debajo** y luego **encima** de la diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ya es triangular: ahora subimos}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 + F_3 \\ F_1 \rightarrow F_1 - F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La izquierda ya es la identidad, así que la derecha es la inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5 COMPROBACIÓN Y AVISOS

Comprobar: $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Fila 1 · col 1: $1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 1 \checkmark$. Merece la pena comprobar al menos un par de entradas.

⚠ Aplica la operación a TODA la fila

Cada $F_i \rightarrow F_i + k \cdot F_j$ afecta a la vez a la parte izquierda **y** a la derecha. Si te olvidas de la mitad, la inversa sale mal.

⚠ El pivote debe ser $\neq 0$

Si un pivote sale 0, **intercambia filas** (operación 1) para traer un número no nulo antes de seguir.

⚠ Fila de ceros $\Rightarrow$ no hay inversa

Si la parte izquierda produce una fila nula, $\det(A) = 0$ y A es **singular**: no existe A^{-1} .

