



MÉTODOS DE INTEGRACIÓN II

cambio de variable y por partes · incluye integrales cíclicas

Cuando no es inmediata:
transforma la integral en una
que sí lo sea.

1 CAMBIO DE VARIABLE · sustitución

Sustituimos una parte por $u = g(x)$ (con $du = g'(x) dx$) para que la integral quede **inmediata en u**. Al final se deshace el cambio.

Los pasos

- 1 Elige el cambio $u = g(x)$.
- 2 Calcula $du = g'(x) dx$ (y despeja dx si hace falta).
- 3 **Sustituye**: no debe quedar ninguna x .
- 4 **Integra** en u (ya es inmediata).
- 5 **Deshaz** el cambio: vuelve a x .

¿Qué u elegir?

Suele funcionar tomar como u :

- lo que está **dentro** de una raíz, potencia, exponencial o logaritmo;
- una función **cuya derivada** también aparece en el integrando.

Si al sustituir queda alguna x suelta, despégala del cambio (p. ej. $x = u+1$).

2 EJEMPLOS · CAMBIO DE VARIABLE · paso a paso

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

- 1 **Cambio**: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$.
- 2 **Sustituye** (la $\frac{1}{x} dx$ es justo du): $\int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int u du$.
- 3 **Integra**: $\int u du = \frac{u^2}{2} + C$.
- 4 **Deshaz el cambio**: $= \frac{(\ln x)^2}{2} + C$.

$$\int x \cdot \sqrt{x-1} dx$$

- 1 **Cambio**: $u = x-1 \Rightarrow x = u+1, du = dx$.
- 2 **Sustituye todo en u**: $\int (u+1) \cdot \sqrt{u} du = \int (u^{3/2} + u^{1/2}) du$.
- 3 **Integra**: $= \frac{2}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C$.
- 4 **Deshaz el cambio**: $= \frac{2}{5} (x-1)^{5/2} + \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + C$.



3 INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

Se parte el integrando en **u** (se deriva) y **dv** (se integra). La nueva integral debe ser **más fácil**.

¿Qué eliges como **u**? Regla ALPES — **u** es la que aparezca antes; el resto (con **dx**) es **dv**.

A

Arcos (inversas:
arcsen, arctg)

L

Logaritmos (ln)

P

Potencias (x^n ,
polinomios)

E

Exponenciales (e^x ,
 a^x)

S

Senos y cosenos

$$\int x \cdot e^x \, dx$$

- 1 **Elige** (ALPES: P antes que E): $u = x$, $dv = e^x \, dx$.
- 2 **Deriva e integra**: $du = dx$, $v = e^x$.
- 3 **Aplica** $uv - \int v \, du$: $= x \cdot e^x - \int e^x \, dx$.
- 4 **Resultado**: $= x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$.

$$\int \ln x \, dx \quad (\text{truco: } dv = dx)$$

- 1 **Elige** (ALPES: L): $u = \ln x$, $dv = dx$.
- 2 **Deriva e integra**: $du = \frac{1}{x} \, dx$, $v = x$.
- 3 **Aplica**: $= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx$.
- 4 **Resultado**: $= x \ln x - x + C$.

4 INTEGRALES CÍCLICAS · por partes dos veces y despejar

Con **exponencial × seno/coseno** (o seno × coseno), por partes **no simplifica**: al aplicarlo **dos veces** reaparece la integral de partida. Entonces la tratamos como una **incógnita** y la despejamos.

$$\text{Llamamos } I = \int e^x \cdot \sin x \, dx$$

- 1 **1ª por partes**: $u = \sin x$, $dv = e^x \, dx \Rightarrow du = \cos x \, dx$, $v = e^x$.
 $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$.
- 2 **2ª por partes** (¡misma idea: la trig como u !) en $\int e^x \cos x \, dx$: $u = \cos x$, $dv = e^x \, dx \Rightarrow du = -\sin x \, dx$, $v = e^x$.
 $\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + I$.
- 3 **Reaparece I**. Sustituyendo: $I = e^x \sin x - (e^x \cos x + I) = e^x \sin x - e^x \cos x - I$.
- 4 **Despeja I como en una ecuación**: $2I = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$.

La clave: en las **dos** aplicaciones elige como **u** el **mismo tipo** de función (aquí, siempre la trigonométrica). Si en la segunda cambias de criterio, la integral se deshace y vuelves al inicio ($0 = 0$). Y no olvides el **+ C** al despejar.

