



ECUACIONES MATRICIALES

despejar X · el lado importa · $A \cdot X = B$, $X \cdot A = B$, $A \cdot X \cdot B = C$

No se «divide»: se multiplica por la inversa, y el lado importa.

1 LA IDEA CLAVE

Multiplicar por la inversa, no dividir

Las matrices **no se dividen**. Para «quitar» una matriz A que multiplica a X , se multiplica por A^{-1} , usando que $A^{-1} \cdot A = I$ e $I \cdot X = X$.

Condición: A debe ser **cuadrada y regular** ($\det A \neq 0$) para que exista A^{-1} .

El producto NO es conmutativo

En general $A \cdot X \neq X \cdot A$. Por eso hay que multiplicar por A^{-1} **en el mismo lado** en el que A está tocando a X :

- si A está a la **izquierda** de $X \Rightarrow$ multiplicas A^{-1} por la **izquierda**.
- si A está a la **derecha** de $X \Rightarrow$ multiplicas A^{-1} por la **derecha**.

2 LOS TIPOS Y CÓMO SE DESPEJA X

Ecuación	Se multiplica...	Solución
$A \cdot X = B$	por A^{-1} por la izquierda : $A^{-1}AX = A^{-1}B$	$X = A^{-1} \cdot B$
$X \cdot A = B$	por A^{-1} por la derecha : $XAA^{-1} = BA^{-1}$	$X = B \cdot A^{-1}$
$A \cdot X \cdot B = C$	A^{-1} por la izquierda y B^{-1} por la derecha	$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
$A \cdot X + B = C$	primero $A \cdot X = C - B$, luego A^{-1} por la izquierda	$X = A^{-1} \cdot (C - B)$

Cuidado con el orden: en $A \cdot X \cdot B = C$ el resultado es $A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, **no** $B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}$. Cada inversa entra por el lado por el que estaba su matriz.

3 EJEMPLO 1 · $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1.$$

1 **Despejo:** $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$ (A^{-1} por la izquierda).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de una entrada: fila 1 · col 1 = $1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 1$. **Comprobación:** $A \cdot X = B$ ✓.



4 EJEMPLO 2 · $X \cdot A = B$ · ahora la inversa entra por la derecha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \det A = 1.$$

1 **Despejo:** $X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$ (A^{-1} por la **derecha**, porque A estaba a la derecha de X).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ojo: si aquí hubieras hecho $X = A^{-1} \cdot B$ (inversa por la izquierda), el resultado sería **otro** y estaría mal. El lado es lo que distingue el Ejemplo 1 del Ejemplo 2.

5 EJEMPLO 3 · $A \cdot X \cdot B = C$ · inversa por los dos lados

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1 **Despejo:** $A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow A^{-1}$ por la izquierda y B^{-1} por la derecha $\Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^{-1}C) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot X \cdot B = C$ ✓. Conviene multiplicar en dos pasos (primero $A^{-1} \cdot C$, luego por B^{-1}) para no equivocarse.

6 AVISOS FRECUENTES

⚠ El lado de la inversa NO es libre

$A \cdot X = B$ da $X = A^{-1}B$; $X \cdot A = B$ da $X = B \cdot A^{-1}$. Multiplicar por el lado equivocado da un resultado distinto y erróneo.

⚠ Comprueba que existe A^{-1}

Si $\det A = 0$ no hay inversa: la ecuación puede no tener solución única. Verifica $\det A \neq 0$ antes de empezar.

⚠ Mantén el orden en los productos

$A^{-1} \cdot C \neq C \cdot A^{-1}$. Al sustituir, respeta el orden que impone el despeje.

⚠ Primero aísla el producto

En $A \cdot X + B = C$, pasa B al otro lado ($A \cdot X = C - B$) **antes** de multiplicar por A^{-1} .

