



PROGRAMACIÓN LINEAL

Solución única · Infinitas soluciones · Sin solución

El óptimo está siempre en un vértice de la región factible.

1 EL PROBLEMA Y EL MÉTODO GRÁFICO

La programación lineal busca el valor **máximo o mínimo** de una función lineal (el beneficio, el coste...) sujeta a una serie de **restricciones**, también lineales, que provienen de limitaciones reales (materiales, tiempo, recursos). Con dos variables se resuelve **gráficamente** en el plano.

Función objetivo: $z = ax + by$: lo que queremos optimizar.

Restricciones: inecuaciones lineales ($\leq$, $\geq$). Casi siempre $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Región factible: el recinto que cumple **todas** las restricciones.

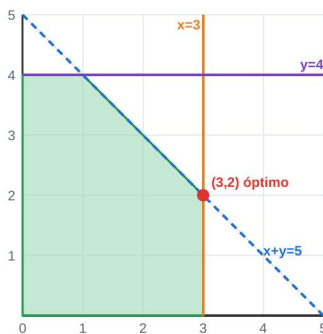
Vértices: las esquinas del recinto; se obtienen cortando las rectas dos a dos.

Método paso a paso

1. **Dibuja** cada restricción: cambia $\leq$ / $\geq$ por $=$, y traza la recta con dos puntos.
2. **Sombrea** el semiplano de cada inecuación y quédate con la **intersección** (región factible).
3. **Halla los vértices** resolviendo el sistema de las dos rectas que se cortan en cada esquina.
4. **Evalúa** $z = ax + by$ (Teorema fundamental): el óptimo está en un vértice.
5. **Compara:** el mayor z es el máximo; el menor, el mínimo.

2 CASO 1 · SOLUCIÓN ÚNICA

Maximizar $z = 3x + 2y$ sujeto a $x + y \leq 5$, $x \leq 3$, $y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.



Región factible (pentágono) y óptimo en (3, 2).

Resolución paso a paso

1. **Rectas frontera:** $x + y = 5$ por (5,0) y (0,5); $x = 3$ vertical; $y = 4$ horizontal.
2. **Región factible:** como todas son $\leq$, con $x, y \geq 0$, es el **pentágono** interior.
3. **Vértices:** (0,0), (3,0), (3,2), (1,4), (0,4).
4. **Evaluamos** $z = 3x + 2y$ en cada vértice:

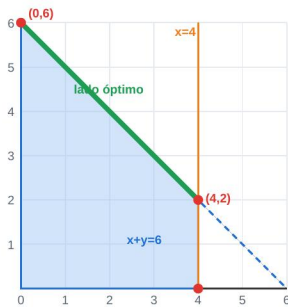
Vértice	$3x + 2y$	z
(0,0)	$0 + 0$	0
(3,0)	$9 + 0$	9
(3,2)	$9 + 4$	13
(1,4)	$3 + 8$	11
(0,4)	$0 + 8$	8

El máximo es $z = 13$, alcanzado solo en el vértice (3, 2) $\Rightarrow$ solución única.



3 CASO 2 · INFINITAS SOLUCIONES

Maximizar $z = 2x + 2y$ sujeto a $x + y \leq 6$, $x \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **Fíjate:** $z = 2x + 2y = 2(x+y)$ crece igual que $x + y$, así que es paralela al lado $x + y = 6$.



Todo el lado (4,2)–(0,6) es óptimo.



Resolución paso a paso

- Rectas frontera:** $x + y = 6$ por (6,0) y (0,6); $x = 4$ vertical.
- Región factible:** el cuadrilátero (0,0), (4,0), (4,2), (0,6).
- Vértices clave del lado superior:** (4,2) sale de $x = 4$ en $x + y = 6 \Rightarrow y = 2$; (0,6) sale de $x = 0$ en $x + y = 6$.
- Evaluamos $z = 2x + 2y$:**

Vértice	$2x + 2y$	z
(0,0)	$0 + 0$	0
(4,0)	$8 + 0$	8
(4,2)	$8 + 4$	12
(0,6)	$0 + 12$	12

Empate en (4,2) y (0,6), ambos con $z = 12$. Como todo el lado cumple $x + y = 6$, en él: $z = 2 \cdot 6 = 12$ constante $\Rightarrow$ infinitas soluciones (cualquier punto del segmento (4,2)–(0,6), p. ej. (2,4), es óptimo).

4 CASO 3 · SIN SOLUCIÓN ÓPTIMA

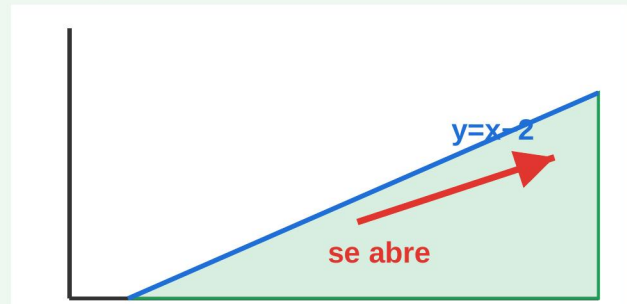
Un problema puede **no tener óptimo** por dos razones muy distintas. Conviene reconocer cada una por su gráfica:

A · Región factible vacía



Restricciones que se **contradicen**. Ej.: $x + y \leq 2$ y a la vez $x + y \geq 6$. Los semiplanos **no se solapan**, así que ningún punto cumple ambas. Sin región no hay nada que optimizar.

B · Región no acotada



El recinto se **abre al infinito** en la dirección en que z crece. Ej.: maximizar $z = x + y$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \geq x - 2$. Al alejarnos a la derecha, z no deja de aumentar $\Rightarrow$ **no hay máximo** (aunque el mínimo sí existe: $z = 0$ en el origen).

Cómo distinguirlos: si **no queda ningún recinto común** $\rightarrow$ caso A (vacía). Si el recinto existe pero se abre por el lado donde mejora z $\rightarrow$ caso B (no acotada). Comprueba siempre si piden máximo o mínimo: uno de los dos puede sí existir.

Los tres casos de un vistazo

- Única** recinto acotado; el óptimo cae en un **vértice**.
- Infinitas** objetivo **paralela a un lado**; toda la arista es óptima.
- Sin sol.** región **vacía** o **no acotada** hacia el óptimo.

Idea clave

Dibuja la región factible, halla los vértices **resolviendo las rectas dos a dos** y evalúa z . Un solo ganador $\rightarrow$ única; empate en un lado $\rightarrow$ infinitas; recinto vacío o abierto hacia el óptimo $\rightarrow$ **sin solución**.