



LÍMITES I · CONCEPTO Y CÁLCULO

idea, límites laterales, álgebra de límites y límites en el infinito

El límite dice hacia dónde se acerca f , no cuánto vale en el punto.

1 ¿QUÉ ES UN LÍMITE?

La idea

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Cuando x se **acerca** a **a** (sin llegar a valer a), $f(x)$ se acerca tanto como queramos a **L** . Describe la **tendencia** de la función.

Detalle importante

El límite **no depende** del valor $f(a)$: la función puede no estar definida en a , o valer otra cosa, y aun así **tener límite**. Lo que cuenta es cómo se comporta **cerca** de a .

2 LÍMITES LATERALES · por la izquierda y por la derecha

Definición y existencia

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$: acercándose **por la izquierda** ($x < a$). $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$: **por la derecha** ($x > a$).

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f = L$$

Ejemplo · función a trozos

$$f(x) =$$

$$\begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f = 2 + 1 = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f = 2^2 = 4$. Como $3 \neq 4$, **no existe** $\lim_{x \rightarrow 2} f$.

3 ÁLGEBRA DE LÍMITES · con $\lim_{x \rightarrow a} f = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g = M$ finitos

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g) = L \pm M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f) = k \cdot L$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g) = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f)^n = L^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f)^g = L^M$$

Cálculo directo: sustituir

Si f es **continua** en a (polinómicas, exponenciales, senos/cosenos...), basta **sustituir**: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$$



4 LÍMITES EN EL INFINITO · comportamiento cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Polinomios

Manda el **término de mayor grado**; el signo depende del coeficiente y de la paridad del grado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 5x + 1) = +\infty \quad \cdot \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$$

Cocientes de polinomios (según grados)

- grado num < grado den $\Rightarrow 0$. Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$.
- grados **iguales** $\Rightarrow$ cociente de coef. principales. Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{x^2 + 5} = 3$.
- grado num > grado den $\Rightarrow \pm\infty$. Ej: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x+1} = +\infty$.

Operaciones con ∞ que sí están determinadas (no son indeterminaciones)

$$\infty + \infty = \infty$$

$$k + \infty = \infty$$

$$k \cdot \infty = \infty \text{ (signo)}$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

$$\frac{k}{0} = \pm\infty \text{ (mira el signo)}$$

$$a^\infty = \infty \text{ (} a > 1 \text{)}$$

$$a^\infty = 0 \text{ (} 0 < a < 1 \text{)}$$

$$\infty^k = \infty \text{ (} k > 0 \text{)}$$

5 AVISOS FRECUENTES · lo que descuenta en la PAU

El límite $\neq$ el valor

Puede existir $\lim_{x \rightarrow a} f$ aunque **$f(a)$ no exista** o valga otra cosa. No confundas límite con imagen.

Laterales que coincidan

Para que exista el límite, los **dos laterales** deben existir y ser **iguales**. Vigila los trozos y los saltos.

$k/0$ no es indeterminación

$\frac{k}{0}$ da $\pm\infty$ (estudia el signo con los límites laterales). Las verdaderas indeterminaciones van en **Límites II**.

