



DISCUSIÓN DE SISTEMAS

teorema de Rouché-Frobenius · discusión según un parámetro

Comparar $\text{rango}(A)$, $\text{rango}(A^*)$ y el nº de incógnitas n .

1 EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Un sistema $A \cdot X = b$ se clasifica comparando el rango de la **matriz de coeficientes** A con el de la **matriz ampliada** $A^* = (A | b)$, frente al **número de incógnitas** n :

Condición	Tipo de sistema	Soluciones
$\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$	Incompatible (SI)	no tiene solución
$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$	Compatible determinado (SCD)	solución única
$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n$	Compatible indeterminado (SCI)	infinitas ($n - \text{rg}$ parámetros)

Idea: si al añadir la columna b el rango **sube**, esa columna aporta una condición imposible $\Rightarrow$ no hay solución. Si el rango **no sube**, hay solución; será única si el rango llega a n , e infinita si se queda por debajo.

2 DISCUSIÓN SEGÚN UN PARÁMETRO · MÉTODO

- 1 Calcula **det A** en función del parámetro e iguala a 0: obtienes los **valores críticos**.
- 2 **Caso general** ($\det A \neq 0$): $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n \Rightarrow$ **SCD**. Se puede resolver (Cramer).
- 3 **Para cada valor crítico**, sustituye y calcula $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$ con menores.
- 4 Compara: iguales y $= n \Rightarrow$ SCD; iguales y $< n \Rightarrow$ SCI; distintos $\Rightarrow$ SI.

3 EJEMPLO · CASO GENERAL · sistema con parámetro a

El sistema

$$\begin{cases} a \cdot x + y + z = 1 \\ x + a \cdot y + z = a \\ x + y + a \cdot z = a^2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Determinante y valores críticos

$$\det A = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2).$$

det A = 0 $\Rightarrow a = 1$ (doble) y $a = -2$ (valores críticos).

Caso general ($a \neq 1$ y $a \neq -2$): $\det A \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = n \Rightarrow$ **SCD**.

$$\text{Solución (Cramer): } x = \frac{-(a+1)}{a+2}, \quad y = \frac{1}{a+2}, \quad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

4 CASO $a = 1$ · rangos iguales pero menores que n

$$A^* = (A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- 1 Las tres filas son **idénticas**: en A todos los menores de orden 2 y 3 son 0 $\Rightarrow$ **rg(A) = 1**.
- 2 En A^* tampoco sube: la columna $b = (1, 1, 1)$ es igual a las demás $\Rightarrow$ **rg(A*) = 1**.
- 3 $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 3 = n \Rightarrow$ **Compatible Indeterminado (SCI)**.
- 4 El sistema se reduce a **$x + y + z = 1$** . Con $3 - 1 = 2$ **parámetros**: $y = \lambda, z = \mu \Rightarrow x = 1 - \lambda - \mu$.

5 CASO $a = -2$ · el rango de A^* sube: incompatible

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

$\text{rg}(A) = 2$

menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$

$\det A = 0$ pero hay un menor 2×2 no nulo $\Rightarrow$ **rango 2**.

$\text{rg}(A^*) = 3$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

El menor orlado con la columna b no se anula $\Rightarrow$ **rango 3**.

$\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*) \Rightarrow$ **Sistema Incompatible (SI)**: no tiene solución.

6 RESUMEN Y AVISOS

Valor de a	$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	Clasificación
$a \neq 1$ y $a \neq -2$	3	3	SCD · solución única
$a = 1$	1	1	SCI · infinitas (2 parám.)
$a = -2$	2	3	SI · sin solución

⚠ **La ampliada nunca tiene menor rango**

Siempre $\text{rg}(A^*) \geq \text{rg}(A)$. El sistema es incompatible justo cuando $\text{rg}(A^*) > \text{rg}(A)$.

⚠ **$\det A = 0$ no decide solo**

Si $\det A = 0$ el sistema NO es SCD, pero puede ser SCI o SI: hay que mirar $\text{rg}(A^*)$.

⚠ **Nº de parámetros = $n - \text{rg}(A)$**

En un SCI, las incógnitas libres son $n - \text{rg}(A)$. Aquí $3 - 1 = 2$.

