



# PROBABILIDAD II · CÁLCULO

Laplace · axiomas · unión · condicionada · independencia

Probabilidad = medir sucesos.  
Todo sale de 3 axiomas.

## 1 REGLA DE LAPLACE

La fórmula

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables a A}}{\text{casos posibles}}$$

**Condición imprescindible:** todos los resultados de E deben ser **equiprobables**. Si el dado está trucado, Laplace **no** vale.

Ejemplos

Dado.  $E = \{1, \dots, 6\}$ ,  $A = \text{«par»} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dado.  $B = \text{«mayor que 3»} = \{4, 5, 6\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Baraja española (40).  $P(\text{oro}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Siempre:  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(E) = 1$ .

## 2 AXIOMAS DE KOLMOGOROV Y PROPIEDADES

**Axioma 1**

$$P(A) \geq 0 \text{ para todo suceso } A$$

**Axioma 2**

$$P(E) = 1$$

**Axioma 3**

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Todo lo demás se deduce de ahí:

**Contrario:**  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

**Imposible:**  $P(\emptyset) = 0$

**Monotonía:**  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

**Diferencia:**  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

**De Morgan:**  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$

**De Morgan:**  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$

**Truco de PAU:** «al menos uno»  $\Rightarrow$  pasa al contrario:  $P(\text{al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno})$ .

## 3 PROBABILIDAD DE LA UNIÓN

**Caso general (compatibles)**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se resta  $P(A \cap B)$  porque al sumar  $P(A)$  y  $P(B)$  la **zona común se cuenta dos veces**.

**Caso incompatibles ( $A \cap B = \emptyset$ )**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Es el axioma 3. Con tres sucesos incompatibles dos a dos:  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ .

**Ejemplo resuelto · dado**

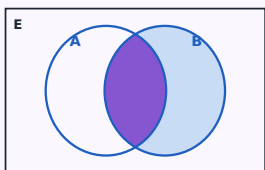
$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{4, 5, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, A \cap B = \{4, 6\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{Comprobación: } A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

$$\text{Y por De Morgan: } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{es } \{1, 3\}, \text{ o sea } \frac{2}{6}) \quad \checkmark$$

## 4 PROBABILIDAD CONDICIONADA

Se «reduce» el espacio muestral



Sabiendo que B ha ocurrido, solo cuentan los casos de B.

Definición y regla del producto

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

**Ejemplo (dado).**  $P(A|B)$  = «sale par sabiendo que es mayor que 3». De  $B = \{4, 5, 6\}$  son pares  $\{4, 6\}$ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad (\text{directo: } \frac{2}{3} \checkmark)$$

## 5 SUCESOS INDEPENDIENTES

Definición

$$A, B \text{ independientes} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Equivale a  $P(A|B) = P(A)$  y a  $P(B|A) = P(B)$ : **que ocurra B no cambia la probabilidad de A.**

Si A y B son independientes, también lo son  $\bar{A}$  y B, A y  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$ .

Cómo se comprueba (siempre igual)

- 1 Calcula  $P(A)$ ,  $P(B)$  y  $P(A \cap B)$ .
- 2 Multiplica  $P(A) \cdot P(B)$  y compara con  $P(A \cap B)$ .
- 3 Iguales  $\implies$  **independientes**. Distintos  $\implies$  **dependientes**.

**Dado:**  $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = P(A \cap B) \implies$  **dependientes**.

**Dos monedas:**  $P(\text{cara y cara}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \implies$  **independientes**.

## 6 EJERCICIO TIPO PAU · resuelto paso a paso

**Enunciado.** Sean A y B con  $P(A) = 0,5$   $P(B) = 0,4$   $P(A \cup B) = 0,7$ . Calcula  $P(A \cap B)$ ,  $P(A|B)$ ,  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$  y estudia si A y B son independientes.

- 1  **$P(A \cap B)$ :** despejamos de la unión.  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2$ .
- 2  **$P(A|B)$ :**  $P(A \cap B)/P(B) = 0,2 / 0,4 = 0,5$ .
- 3  **$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ :** por De Morgan es el contrario de la unión:  $1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$ .
- 4 **¿Independientes?**  $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 = P(A \cap B) \implies$  **sí, son independientes**. (Coherente:  $P(A|B) = 0,5 = P(A)$ .)
- 5 **Extra:**  $P(B|A) = 0,2/0,5 = 0,4 = P(B) \checkmark$  ·  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3$ .

## 7 AVISOS FRECUENTES

⚠ **Independientes  $\neq$  incompatibles**

Si  $A \cap B = \emptyset$  y  $P(A), P(B) > 0$ :  $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \implies$  **dependientes**. Incompatibles es de **sucesos**; independientes, de **probabilidades**.

⚠ **Cuidado con el contrario en la condicionada**

Sí:  $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$ . No:  $P(A|\bar{B}) = 1 - P(A|B)$ . Dado con  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ :  $P(A|B) = 1$  pero  $P(A|\bar{B}) = 0,5 \neq 0$ .

⚠  **$P(A|B)$  no es  $P(B|A)$**

Dado,  $A = \{2, 4, 6\}$  y  $C = \{6\}$ :  $P(A|C) = 1$  (si sale 6 es par seguro) pero  $P(C|A) = \frac{1}{3}$ . Relacionarlas es **Bayes** (Probabilidad III).

⚠ **Laplace solo con equiprobabilidad**

«Favorables entre posibles» exige que **cada resultado sea igual de probable**. Con extracciones sin reposición, usa condicionadas y árboles.