



DISCUSIÓN DE UN SISTEMA 3x3

según un parámetro · por Rouché-Frobenius y por Gauss

Discutir = decir cuántas soluciones tiene según el parámetro.

1 TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Comparamos el rango de la matriz de coeficientes **A** con el de la **ampliada A'** (añade la columna de términos independientes) y con el nº de incógnitas **n**.

$$A' = (A | b) \quad n = 3$$

Siempre $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A')$. La comparación decide el tipo de sistema.

SCD

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = n \rightarrow$ **Compatible determinado**: solución única.

SCI

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A') < n \rightarrow$ **Compatible indeterminado**: infinitas soluciones.

SI

$\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A') \rightarrow$ **Incompatible**: no tiene solución.

2 NUESTRO EJEMPLO · discute según a

El sistema

$$\begin{cases} a \cdot x + y + z = 1 \\ x + a \cdot y + z = 1 \\ x + y + a \cdot z = 1 \end{cases}$$

Matrices A y A'

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right)$$

La idea del método

Buscamos los **valores críticos** de a (los que anulan $\det(A)$). Fuera de ellos el sistema es SCD; en cada valor crítico hay que mirar con cuidado si sale SCI o SI.

3 MÉTODO 1 · DETERMINANTES (Rouché)

$$\det(A) = (a - 1)^2 (a + 2)$$

Paso 1: $\det(A) = 0 \iff a = 1$ o $a = -2$. Estos son los **valores críticos**.

a) $a \neq 1$ y $a \neq -2$

SCD

- $\det(A) \neq 0 \implies \text{rg}(A) = 3$.
- Como A' contiene a A: $\text{rg}(A') = 3$ también.
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3 = n \implies$ **solución única**.
- Por simetría o Cramer, $x = y = z = \frac{1}{a+2}$.

b) $a = 1$

SCI

- Las tres filas de A son (1,1,1) $\implies \text{rg}(A) = 1$.
- En la ampliada también todas las filas son iguales $\implies \text{rg}(A') = 1$.
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 1 < 3 \implies$ **infinitas soluciones**.
- Quedan $3 - 1 = 2$ parámetros: por ejemplo $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$.

c) $a = -2$

SI

- $\det(A) = 0$, pero existe un menor de orden 2 no nulo $\implies \text{rg}(A) = 2$.
- Al ampliar con la columna de términos independientes se obtiene $\text{rg}(A') = 3$.
- $\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A') \rightarrow$ **sin solución**.



4 MÉTODO 2 · GAUSS

Colocamos un 1 como pivote (intercambio de filas) y hacemos $F_2 - F_1$ y $F_3 - a \cdot F_1$. Combinando las filas 2 y 3 llegamos a la **forma escalonada** de la derecha. El pivote clave es **$a + 2$** .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \end{array} \right)$$

a) $a \neq 1$ y $a \neq -2$

SCD

- Los tres pivotes 1, $(a-1)$ y $(a+2)$ son $\neq 0$: hay **3 pivotes = 3 incógnitas**.
- La última fila da $(a+2)z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{a+2}$.
- Sustituyendo hacia atrás sale un único valor de y , $x \Rightarrow$ **solución única**.

b) $a = 1$

SCI

- Al hacer $F_2 - F_1$ y $F_3 - F_1$, las filas 2 y 3 se anulan enteras (también el término indep.).
- Solo queda $x + y + z = 1$: una fila no nula.
- $rg = 1 < 3 \Rightarrow$ **infinitas soluciones** con 2 parámetros.

c) $a = -2$

SI

- El pivote $a + 2 = 0$: la última fila queda $(0 \ 0 \ 0 \ | \ 1)$.
- Eso significa $0 = 1$: **imposible**.
- El sistema es incompatible $\rightarrow$ **sin solución**.

5 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA · 3 planos en el espacio

SCD

Se cortan **en un punto**.

SCI

Comparten una **recta** (o un plano común).

SI

No hay **punto común**.

6 RESUMEN DE LA DISCUSIÓN

SCD

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \rightarrow$ compatible determinado $\rightarrow$ solución única $\rightarrow x = y = z = \frac{1}{a+2}$

SCI

Si $a = 1 \rightarrow$ compatible indeterminado $\rightarrow$ infinitas soluciones (2 parámetros).

SI

Si $a = -2 \rightarrow$ sistema incompatible $\rightarrow$ no tiene solución.

