



# RANGO SEGÚN UN PARÁMETRO

método de los menores · matrices cuadradas y no cuadradas

El rango es el orden del mayor menor distinto de cero.

## 1 RANGO POR MENORES · IDEA Y MÉTODO

### Qué es un menor y qué es el rango

Un **menor de orden  $k$**  es el determinante de una submatriz  $k \times k$  (eligiendo  $k$  filas y  $k$  columnas).

El **rango** de una matriz es el **orden del mayor menor no nulo**. Coincide con el nº de filas (o columnas) linealmente independientes.

### Cómo se busca (menores orlados)

- 1 Localiza un menor de orden 2 **distinto de cero**  $\Rightarrow$  rango  $\geq 2$ .
- 2 **Órlo**: amplíalo con una fila y una columna más para formar menores de orden 3.
- 3 Si algún menor de orden 3  $\neq 0 \Rightarrow$  rango  $\geq 3$ ; si **todos** los orlados son 0  $\Rightarrow$  el rango se queda en 2.

**Cotas del rango:** en una matriz de orden  $m \times n$ , el rango nunca supera  **$\min(m, n)$** . Una  $3 \times 3$  tiene rango  $\leq 3$ ; una  $3 \times 4$ , rango  $\leq 3$ .

## 2 ESTRATEGIA CUANDO HAY UN PARÁMETRO

- 1 Toma el menor **de mayor orden posible** (en una  $3 \times 3$ , el propio determinante) y calcúlalo en función del parámetro.
- 2 **Iguala a cero** y resuelve: obtienes los **valores críticos** del parámetro (los que hacen bajar el rango).
- 3 **Caso general:** para los demás valores, ese menor  $\neq 0 \Rightarrow$  rango máximo.
- 4 **Casos críticos:** sustituye cada valor y estudia menores de orden menor para ver hasta dónde baja el rango.

## 3 EJEMPLO 1 · MATRIZ CUADRADA $3 \times 3$

Estudia el rango de  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$  según el parámetro  $a$ .

- 1 **Determinante** (menor de orden 3):  $\det A = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2)$ .
- 2  **$\det A = 0$**   $\Rightarrow a = 1$  (doble) o  $a = -2$ . Estos son los valores críticos.
- 3 **Caso general ( $a \neq 1$  y  $a \neq -2$ ):**  $\det A \neq 0 \Rightarrow$  **rango(A) = 3**.

### Caso $a = 1$

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Todas las filas iguales: **todos** los menores de orden 2 son 0. Solo hay menores de orden 1 no nulos  $\Rightarrow$  **rango = 1**.

### Caso $a = -2$

$$A(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ menor } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

$\det A = 0$ , pero ese menor de orden 2 vale  $3 \neq 0 \Rightarrow$  **rango = 2**.

## 4 EJEMPLO 2 · MATRIZ NO CUADRADA 3×4

Estudia el rango de  $B(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & a \end{pmatrix}$  según  $a$ .

- 1 **Cota:** es  $3 \times 4 \Rightarrow \text{rango} \leq \min(3, 4) = 3$ . El mayor menor posible es de orden 3.
- 2 **Rango  $\geq 2$  siempre:** el menor de orden 2 de las columnas 1 y 2 (filas 1 y 2) vale  $1 \neq 0$ . No depende de  $a$ .
- 3 **Menor de orden 3** (columnas 1, 2 y 4):  $\det = a - 2$ . (Los otros menores  $3 \times 3$  llevan a la misma condición.)
- 4  **$\det = 0 \Rightarrow a = 2$ .** Ese es el único valor crítico.

### Caso general ( $a \neq 2$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = a - 2 \neq 0$$

Hay un menor de orden 3 no nulo  $\Rightarrow$  **rango(B) = 3**.

### Caso $a = 2$

$$B(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora  $F_3 = F_1 + F_2$ : todos los menores de orden 3 se anulan, pero sigue habiendo uno de orden 2 no nulo  $\Rightarrow$  **rango = 2**.

**Resumen:**  $\text{rango}(B) = 3$  si  $a \neq 2$  ·  $\text{rango}(B) = 2$  si  $a = 2$ .

## 5 AVISOS FRECUENTES

### ⚠ **$\det = 0$ no fija el rango**

Que el determinante se anule solo dice que el rango **baja** del máximo. Hay que mirar menores de orden menor para saber **hasta dónde**.

### ⚠ **Un menor no nulo basta**

Para asegurar  $\text{rango} \geq k$  basta **un** menor de orden  $k$  no nulo. Para descartarlo hay que ver que **todos** son nulos.

### ⚠ **En no cuadradas no hay «determinante»**

Se trabaja con **menores** del mayor orden posible =  $\min(m, n)$ . Elige uno cómodo y órlalo.

### ⚠ **No olvides la raíz doble**

En  $(a - 1)^2(a + 2) = 0$  los valores críticos son  $a = 1$  **y**  $a = -2$ . Estudia **cada** uno por separado.

