



INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

descomposición en fracciones simples

· Métodos de Integración III

Toda fracción simple integra a $\ln$, potencias o $\arctg$.

1 EL MÉTODO · paso a paso

Queremos integrar $P(x) / Q(x)$. La idea es **romperla en fracciones sencillas** que sí sabemos integrar.

Los pasos

- 1 **¿Grado(P) $\geq$ Grado(Q)?** Si sí, **divide primero**: $\frac{P}{Q} = C(x) + \frac{R}{Q}$ (con grado $R <$ grado Q).
- 2 **Factoriza Q(x)**: halla sus raíces.
- 3 **Descompón R/Q en fracciones simples** según el tipo de raíces (ver tabla).
- 4 **Halla los coeficientes** A, B, ... dando valores a x o identificando términos.
- 5 **Integra** cada fracción simple: todas son inmediatas.

La clave del reparto

El número de constantes (A, B, ...) es igual al **grado de Q**.

Cada **raíz múltiple** de orden k aporta **k fracciones** (con denominadores de potencia creciente), no una sola.

2 TIPOS DE FRACCIONES SIMPLES · según las raíces de Q(x)

FACTOR EN Q(x)	FRACCIONES SIMPLES QUE APORTA	SE INTEGRA COMO...
$(x - a)$ raíz simple	$\frac{A}{x - a}$	$A \ln x - a + C$
$(x - a)^k$ raíz múltiple	$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$	logaritmo + potencias $\int \frac{A}{(x - a)^m} dx = \frac{-A}{(m - 1)(x - a)^{m - 1}} \quad (m \geq 2)$
$x^2 + px + q$ irreducible ($\Delta < 0$)	$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$	combinación de ln y arctg



3 EJEMPLOS RESUELTOS · paso a paso

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx \quad \text{raíces simples}$$

- 1 **Factoriza:** $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$.
- 2 **Descompón:** $\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$.
- 3 **Coeficientes:** $5x+1 = A(x+2)+B(x-1)$. $x=1$: $6=3A \Rightarrow A=2$. $x=-2$: $-9=-3B \Rightarrow B=3$.
- 4 **Integra:** $= 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x+2} = 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + C$.

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} \quad \text{raíz múltiple}$$

- 1 **Q ya factorizado:** raíz simple $x=0$ y raíz doble $x=1$.
- 2 **Descompón:** $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$.
- 3 **Coeficientes:** $1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$. $x=0$: $A=1$. $x=1$: $C=1$. Coef. x^2 : $A+B=0 \Rightarrow B=-1$.
- 4 **Integra** (recuerda $\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1}$): $= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$.

$$\int \frac{x^2+2}{x+1} dx \quad \text{grado num} \geq \text{den: divide primero}$$

- 1 **Es impropia** (grado 2 $\geq$ grado 1): haz la **división**. $\frac{x^2+2}{x+1} = x - 1 + \frac{3}{x+1}$. (cociente $x-1$, resto 3)
- 2 **Integra** el cociente (inmediato) y la fracción propia: $= \int (x-1)dx + 3 \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x+1| + C$.

4 AVISOS FRECUENTES · lo que descuenta en la PAU

Divide si es impropia

Si **grado(P) $\geq$ grado(Q)**, la **división es obligatoria** antes de descomponer. Si no, el reparto no funciona.

ln con valor absoluto y +C

Los logaritmos llevan **valor absoluto**: $\ln|x-a|$. Y nunca olvides la **+ C** final.

Raíces complejas $\rightarrow$ arctg

Si Q tiene un factor **cuadrático irreducible** ($\Delta < 0$), su fracción $(Mx+N)/(x^2+px+q)$ integra a una **combinación de ln y arctg**.

