



EL RANGO DE UNA MATRIZ

según un parámetro · por MENORES y por GAUSS

El rango cuenta cuántas filas son de verdad independientes.

1 ¿QUÉ ES EL RANGO?

El **rango** de una matriz, $r(A)$, es el número de **filas (o columnas) linealmente independientes**. Equivale al **orden del mayor menor no nulo** que se puede encontrar en ella.

Dos formas de calcularlo

Menores: el rango es el orden del mayor menor (determinante de una submatriz cuadrada) distinto de cero.

Gauss: escalona por filas; el rango es el número de filas no nulas (pivotes) que quedan.

$$0 \leq r(A) \leq \min(n^\circ \text{ filas}, n^\circ \text{ columnas})$$

Propiedades útiles

- Si A es $n \times n$: $r(A) = n \iff \det A \neq 0$ (A regular).
- Filas o columnas de ceros, o repetidas, no suman rango.
- El rango **no cambia** al hacer operaciones elementales.

2 ESTRATEGIA CON PARÁMETRO · paso a paso

Regla mental: el rango es máximo «casi siempre»; solo baja en los valores del parámetro que anulan el determinante. Los dos métodos deben dar el **mismo** resultado.

1 Plantea con el parámetro

Calcula el menor de mayor orden (o escalona) dejando el parámetro sin sustituir.

2 Iguala a cero

Resuelve $\det = 0$. Sus soluciones son los **valores críticos** del parámetro.

3 Caso general

Si a no es crítico $\implies \det \neq 0 \implies$ **rango máximo** (el orden de la matriz).

4 Casos particulares

Sustituye cada valor crítico y estudia menores de orden inferior (o cuenta pivotes).

3 EJEMPLO · matriz de orden 3

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \det A = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) \implies \text{valores críticos } a = 1, a = -2.$$

Método 1 · Menores

- El mayor menor posible es de orden 3: el propio determinante.
- Igualemos a cero: $(a-1)^2(a+2) = 0 \implies a = 1, a = -2$.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $\det A \neq 0 \implies r(A) = 3$.
- Si $a = -2$: $\det A = 0$, pero el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies r(A) = 2$.
- Si $a = 1$: todos los elementos son 1; cualquier menor de orden 2 vale 0 $\implies r(A) = 1$.

Método 2 · Gauss

- $F_1 \leftrightarrow F_2$ (pivote 1), luego $F_2 - aF_1$ y $F_3 - F_1$:
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}$$
- Si $a = 1$: las filas 2 y 3 se anulan $\implies$ 1 fila no nula $\implies r(A) = 1$.
- Si $a \neq 1$: sacando factor $(1-a)$ y escalonando, los pivotes son 1, 1, $(a+2)$.
- Si además $a \neq -2$: 3 pivotes $\neq 0 \implies r(A) = 3$.
- Si $a = -2$: el tercer pivote es 0 $\implies$ 2 filas no nulas $\implies r(A) = 2$.

Conclusión:

$$a \neq 1, -2 \implies r(A) = 3$$

$$a = -2 \implies r(A) = 2$$

$$a = 1 \implies r(A) = 1$$



4 EJEMPLO · matriz de orden 4

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \det A = (a-1)(a-2) \Rightarrow \text{valores críticos } a = 1, a = 2.$$

Método 1 · Menores

- El mayor menor es de orden 4: $\det A = (a-1)(a-2)$.
- Igualamos a cero: $\det A = 0 \Rightarrow a = 1$ o $a = 2$.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$: $\det A \neq 0 \Rightarrow r(A) = 4$.
- Si $a = 1$: menor de orden 3 (filas 1,2,4 · cols 1,2,4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$$
- Si $a = 2$: menor de orden 3 (filas 1,2,3 · cols 1,2,3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$$

Método 2 · Gauss

- Restamos la 1ª fila a las demás: $F_2 - F_1, F_3 - F_1, F_4 - F_1$.
- Después $F_4 - F_2$. Forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$
- Pivotes: 1, 1, (a-1), (a-2). Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$: 4 pivotes $\Rightarrow r(A) = 4$.
- Si $a = 1$: se anula el 3.er pivote $\Rightarrow$ 3 filas no nulas $\Rightarrow r(A) = 3$.
- Si $a = 2$: se anula el 4.º pivote $\Rightarrow$ 3 filas no nulas $\Rightarrow r(A) = 3$.

Conclusión:

$$a \neq 1, 2 \Rightarrow r(A) = 4$$

$$a = 1 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$a = 2 \Rightarrow r(A) = 3$$

5 EJEMPLO · matriz no cuadrada 3×4

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & a \end{pmatrix} \rightarrow \text{al ser } 3 \times 4, \text{ el rango máximo posible es } 3.$$

Método 1 · Menores

- Probamos un menor de orden 3 (columnas 1, 2 y 4):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & a \end{vmatrix} = 3 - a.$$
- Igualamos a cero: $3 - a = 0 \Rightarrow a = 3$ (valor crítico).
- Si $a \neq 3$: ese menor de orden 3 es $\neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$.
- Si $a = 3$: los menores de orden 3 se anulan, pero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Método 2 · Gauss

- $F_2 - 2F_1$ y $F_3 - 3F_1$, luego $F_3 - F_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$
- Pivotes: 1, -1, y la última fila vale (a-3) en la última columna.
- Si $a \neq 3$: 3 filas no nulas $\Rightarrow r(A) = 3$.
- Si $a = 3$: la última fila se anula $\Rightarrow$ 2 filas no nulas $\Rightarrow r(A) = 2$.

Conclusión:

$$a \neq 3 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$a = 3 \Rightarrow r(A) = 2$$

Resumen de los ejemplos

Orden 3: $rg = 3$ si $a \neq 1, -2$ · $rg = 2$ si $a = -2$ · $rg = 1$ si $a = 1$.

Orden 4: $rg = 4$ si $a \neq 1, 2$ · $rg = 3$ si $a = 1$ · $rg = 3$ si $a = 2$.

3×4: $rg = 3$ si $a \neq 3$ · $rg = 2$ si $a = 3$.

Idea clave

El rango es máximo salvo en los valores del parámetro que anulan el determinante. Menores y Gauss son dos caminos hacia la **misma** respuesta: elige menores cuando el determinante factoriza bien, y Gauss cuando la matriz es grande o no cuadrada.